Angles corniculaires et nombres superréels

Bair, Jacques; Henry, Valérie

Published in:
Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin

Publication date:
2008

Document Version
Première version, également connu sous le nom de pré-print

Angles corniculaires et nombres superréels

J. Bair[1] V. Henry[2]

Abstract

Following the works of van Asch and van der Blij, we show that the horn angles introduced by Euclide can be measured by superreal numbers as Tall defined them. We deduce from this the possibility to estimate, on the one hand, the ratio of the measures of a horn angle and of the mixed angle formed by a spiral of Archimede and, on the other hand, the ratio of the measures of two horn angles.

Résumé

En nous appuyant sur des travaux de van Asch et van der Blij, nous montrons que les angles corniculaires introduits par Euclide peuvent se voir attribuer une mesure numérique donnée par un nombre superréel infiniment petit au sens de Tall. Nous en déduisons la possibilité d'estimer d'une part le rapport entre les mesures d'un angle corniculaire et d'un angle mixtiligne formé par une spirale d'Archimède, et d'autre part le rapport des mesures de deux angles corniculaires.

MSC Classification : 26E35, 51M04

Key words : horn angles, nonstandard analysis, superreal numbers

1 Introduction

La notion d'angle, fondamentale en mathématiques, est délicate et a fait l'objet de multiples études, parfois contradictoires. Ainsi en est-il de la théorie des *angles corniculaires*, dont l'histoire peut être schématiquement décrite en trois étapes conformément à la dialectique hégélienne.

1. **Thèse.** Dans le Premier Livre de ses *Eléments* [2], Euclide (IIIe siècle av. J.-C.) définit la notion d'angle plan, en ne se limitant pas seulement aux angles rectilignes : *un angle plan est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre ... et quand les lignes contenant l'angle sont droites, l'angle*

[1]J.Bair@ulg.ac.be
[2]V.Henry@ulg.ac.be

est appelé rectiligne ([2], p. 158). Il y considère des angles *mixtilignes*, notamment l'*"angle corniculaire" - inclinaison, mutuelle de la circonférence d'un cercle et de sa tangente en un point* ([2], p. 158) ; de fait, dans le Troisième Livre de ses *Eléments*, il démontre que *la droite menée à angles droits avec le diamètre du cercle à partir d'une extrémité tombera à l'extérieur du cercle, et dans le lieu compris entre la droite et la circonférence, une autre droite ne sera pas intercalée ; en outre, ... l'angle restant [c'est-à-dire l'angle corniculaire ainsi construit est] plus petit que tout angle rectiligne aigu* ([2], pp. 423-424).

2. **Antithèse.** Dans le *Commentaire* au Premier Livre des *Eléments* d'Euclide, Proclus (412 - 485) s'interroge sur la nature des angles et met notamment en évidence le paradoxe suivant : d'une part, les angles apparaissent comme étant des quantités qui peuvent être comparées et divisées, mais, d'autre part, Euclide a démontré qu'un angle corniculaire est inférieur à tout angle rectiligne aigu, alors qu'il devrait donc être une quantité non nulle. Après bien des débats, Wallis affirmera qu'un angle corniculaire n'est pas un angle : *Je dis que cette déflexion (qui éloigne la courbe de sa tangente ...) n'est pas un angle ou une déclinaison, (pas plus que dans un mouvement une accélération n'est une vitesse). Mais c'est le commencement d'une déclinaison, qui montre le degré de courbure* ([9], p. 655, cité par [6], p. 162).

3. **Synthèse.** En sortant du cadre numérique pour travailler dans le cadre fonctionnel, les mathématiciens hollandais van Asch et van der Blij parviennent, en 1995, à définir une *mesure non triviale pour l'angle situé entre deux courbes tangentes* ([8], p. 573).

   Cela permet de lever l'objection de Proclus rappelée ci-dessus.

2 Estimation fonctionnelle des angles corniculaires ou mixtilignes

Dans un premier temps, appliquons les résultats des deux auteurs aux angles corniculaires.

Sans nuire à la généralité, nous allons étudier un angle corniculaire γ formé par l'axe horizontal H des abscisses et la portion $\mathcal{C}$ située dans le premier quadrant d'un cercle qui vient toucher tangentiellement H en l'origine du plan.

Désignons par R le rayon du cercle considéré, de sorte que $\mathcal{C}$ est d'équation cartésienne :

$$y = R - \sqrt{R^2 - x^2},$$

ou encore, en coordonnées polaires notées ρ pour la distance à l'origine et θ pour l'angle polaire :

$$\rho \ \sin\theta = R - \sqrt{R^2 - \rho^2 \ \cos^2\theta} \ ;$$

après quelques calculs élémentaires, on peut encore écrire

$$\sin\theta = \frac{\rho}{2 \ R}.$$

Ainsi, l'angle polaire θ d'un point de $\mathcal{C}$, situé à une distance ρ de l'origine, est donné par

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\rho}{2\ R}\right).$$

D'autre part, la valeur de l'angle polaire θ peut également être mise sous la forme suivante

$$\theta = \frac{l\left(\rho\right)}{\rho},$$

où $l\left(\rho\right)$ désigne la longueur de l'arc, intercepté par l'angle au centre θ, du cercle centré à l'origine et passant par le point considéré.

Comme l'angle polaire θ d'un point courant de $\mathcal{C}$ varie avec la distance ρ de ce point à l'origine, l'angle corniculaire γ peut être en quelque sorte "estimé" par sa *fonction d'estimation* f_γ définie comme suit :

$$f_\gamma : \rho \mapsto \theta = \arcsin\left(\frac{\rho}{2R}\right) = \frac{l\left(\rho\right)}{\rho} = f_\gamma\left(\rho\right).$$

On a visiblement

$$\lim_{\rho\rightarrow 0} f_\gamma\left(\rho\right) = 0 \text{ et } \lim_{\rho\rightarrow 0} \frac{f_\gamma\left(\rho\right)}{\rho} = \frac{1}{2R}.$$

En tenant compte de ces deux limites, on peut, à l'instar de divers auteurs [5], assimiler la fonction f_γ à un infiniment petit d'ordre 1 relativement à la variable ρ tendant vers 0 ([5], p. 17)

A la suite de van Asch et van der Blij [8], nous pouvons généraliser ces résultats à une large classe d'angles mixtilignes. De fait, toute fonction analytique F au voisinage de 0 détermine, dans le plan, un angle mixtiligne dont un des côtés est l'axe horizontal des abscisses, tandis que le second côté est la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est donnée par

$$\theta = F\left(\rho\right).$$

En reprenant le raisonnement réalisé pour un angle corniculaire et avec les mêmes notations, on peut "évaluer" un tel angle mixtiligne α par sa *fonction d'estimation* F_α définie comme suit :

$$F_\alpha : \rho \mapsto \theta = \frac{l\left(\rho\right)}{\rho} = F_\alpha\left(\rho\right).$$

Parmi les angles mixtilignes considérés figurent notamment, outre les angles corniculaires, les angles rectilignes dont la fonction d'estimation est une fonction constante, ou encore les angles "spiralés" dont le côté curviligne est une spirale et dont la fonction d'estimation est une fonction linéaire.

En adaptant une idée de D. Tall [7], on peut instaurer un ordre, noté $<_T$, relatif à ces angles mixtilignes : pour deux tels angles α et β, dont la fonction d'estimation est respectivement F_α et F_β, on a la définition suivante

$$\alpha <_T \beta \Leftrightarrow \exists k > 0, \quad F_\alpha\left(\rho\right) < F_\beta\left(\rho\right) \text{ pour tout } \rho \in]0, k[.$$

En particulier, pour deux angles corniculaires γ_1 et γ_2, définis par des cercles de rayon R_1 et R_2 respectivement, on a visiblement

$$\gamma_1 <_T \gamma_2 \Leftrightarrow R_1 > R_2.$$

Par ailleurs, il est clair que tout angle corniculaire γ est un "infiniment petit positif" ; en effet, pour tout angle rectiligne δ possédant une fonction d'estimation positive et pour l'angle nul ν dont les deux côtés rectilignes sont superposés, on dispose de ces inégalités :

$$\nu <_T \gamma <_T \delta.$$

L'objectif qui va être poursuivi dans la suite de cette note consiste à sortir du cadre fonctionnel et à définir une mesure numérique d'un angle corniculaire. D'après ce qui précède, une telle mesure devrait être un "nombre" positif, mais inférieur à tout nombre réel positif. Il ne peut donc pas s'agir d'un nombre réel, mais bien d'un "infiniment petit" au sens considéré déjà par Leibniz puis par ses successeurs.

Nous nous proposons d'associer à chaque angle corniculaire, et plus généralement à chaque angle mixtiligne considéré ci-dessus, une mesure qui sera un nombre *superréel* ([7]). Mais, auparavant, nous allons présenter ces nombres superréels d'une manière nouvelle ([3]).

3 Introduction nouvelle des nombres superréels

L'idée poursuivie consiste à construire une extension de $\mathbb{R}$ dans laquelle les nouveaux nombres sont introduits au moyen des mêmes règles du calcul agébrique que les réels et qui contienne un nombre, forcément non réel, qui soit infiniment petit, c'est-à-dire non nul mais inférieur à tout réel positif. A cet effet, nous allons procéder par analogie avec la construction hamiltonienne des nombres complexes sous forme de couples de réels soumis à des règles algébriques bien définies ([3], [4]).

On définit ainsi l'*ensemble des superréels* :

$$\mathcal{R} = \{(a_j)_{j\in\mathbb{Z}} : a_j \in \mathbb{R},\ \exists m \in \mathbb{Z} : a_j = 0,\ \forall j < m\}$$

sur lequel sont introduites deux opérations :

$$+_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R} : \big((a_j)_{j\in\mathbb{Z}}, (b_j)_{j\in\mathbb{Z}}\big) \mapsto (a_j + b_j)_{j\in Z}$$

$$\cdot_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R} : \big((a_j)_{j\in\mathbb{Z}}, (b_j)_{j\in\mathbb{Z}}\big) \mapsto \left(\sum_{k=i+j} a_i b_j\right)_{k\in\mathbb{Z}}$$

Muni de ces opérations, on vérifie aisément que la structure $(\mathcal{R}, +_{\mathcal{R}}, 0, \cdot_{\mathcal{R}}, 1)$ est un corps commutatif si on pose

$$0 = (a_j)_{j\in\mathbb{Z}} \text{ tel que } a_j = 0\ \forall j \in \mathbb{Z}$$

et

$$1 = (a_j)_{j\in\mathbb{Z}} \text{ tel que } a_j = 0 \ \forall j \neq 0, a_0 = 1.$$

Tout réel r est un élément de $\mathcal{R}$ si on écrit que $r = (a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ tel que $a_j = 0 \ \forall j \neq 0, a_0 = r$; on a donc $\mathbb{R} \subset \mathcal{R}$.

3.1 Ordre sur $\mathcal{R}$ et existence d'un élément infiniment petit

Définition 3.1 (Ordre d'un élément $\alpha \neq 0$ de $\mathcal{R}$)
Soit $\alpha \in \mathcal{R}$, $\alpha = (a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, $\exists\ m \in \mathbb{Z}$ tel que $a_j = 0,\ \forall j < m$ et $a_m \neq 0$. On appelle m l'ordre de α, ce que l'on note $m = o(\alpha)$.

Définition 3.2 *Pour $\alpha = (a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, $\beta = (b_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, $\alpha \neq \beta$, soit p le plus petit entier tel que $a_p \neq b_p$, la relation d'ordre sur $\mathcal{R}$ est définie comme suit :*

$$\alpha <_{\mathcal{R}} \beta \ \textit{si}\ a_p < b_p.$$

Il est évident que l'ordre ainsi défini sur $\mathcal{R}$ étend l'ordre naturel sur $\mathbb{R}$.

Définissons un élément particulier de $\mathcal{R}$:

$$\varepsilon = (a_j)_{j\in\mathbb{Z}} : a_1 = 1 \text{ et } a_j = 0,\ \forall j \neq 1.$$

Cet élément ε n'appartient pas à $\mathbb{R}$. Soit $r \in \mathbb{R}_0^+$, comparons ε à r : il est évident de montrer que, dans $\mathcal{R}$,

$$\varepsilon <_{\mathcal{R}} r$$

et on obtient de même que

$$0 <_{\mathcal{R}} \varepsilon.$$

L'élément ε défini est donc ce que nous avons appelé un élément infiniment petit positif.

3.2 Superréels et développement en série

A l'aide de cet élément particulier ε, nous allons pouvoir proposer une autre écriture pour les éléments de $\mathcal{R}$: tout élément α de $\mathcal{R}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\alpha = (a_j)_{j\in\mathbb{Z}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varepsilon^k.$$

Les définitions du produit et de la somme dans $\mathcal{R}$ se justifient aisément par les propriétés de la somme et du produit dans $\mathbb{R}$ puisque, dans le cas du produit par exemple, on a

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot_{\mathcal{R}} \beta &= \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \varepsilon^j\right) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \varepsilon^k\right) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_j b_k \varepsilon^{j+k} \\
&= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j+k=i} a_j b_k\right) \varepsilon^i
\end{aligned}$$

On définit ensuite des ordres de grandeur dans l'ensemble $\mathcal{R}$.

Définition 3.3 *Un élément α non nul de $\mathcal{R}$ est*

- *appréciable si o(α)$= 0$;*
- *infiniment petit si o(α)> 0 ;*
- *infiniment grand si o(α)< 0 ;*
- *limité si o(α)≥ 0.*

Définition 3.4 *Soit $\alpha \in \mathcal{R}$ limité, la partie standard de α, notée $st(\alpha)$, est le terme indépendant dans le développement de α :*

$$\alpha = \sum_{j=m}^{+\infty} a_j \varepsilon^j \Rightarrow st(\alpha) = a_0.$$

De cette définition découlent immédiatement ces propriétés de la partie standard :

Proposition 3.5 *La partie standard de tout superréel limité est unique.*
Soient α et $\beta \in \mathcal{R}$ limités,

- $st(\alpha +_{\mathcal{R}} \beta) = st(\alpha) + st(\beta)$
- $st(\alpha \cdot_{\mathcal{R}} \beta) = st(\alpha) \cdot st(\beta)$
- $\alpha <_{\mathcal{R}} \beta \Rightarrow st(\alpha) \leq st(\beta)$
- $st(\alpha) < st(\beta) \Rightarrow \alpha <_{\mathcal{R}} \beta$

4 Mesure numérique d'un angle corniculaire

Pour "mesurer" un angle corniculaire γ déterminé par un cercle de rayon R, construisons le développement de Mac Laurin de la fonction d'estimation f_γ introduite ci-dessus. On peut écrire, pour ρ suffisamment petit

$$\begin{aligned}\theta \;=\; & \frac{\rho}{2R} + \frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{\rho}{2R}\right)^3 + \frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2\cdot 5}\left(\frac{\rho}{2R}\right)^5 + \dots \\ & + \frac{1\cdot 3\cdot \ldots (2p-3)(2p-1)}{p!\cdot 2^p\cdot (2p+1)}\left(\frac{\rho}{2R}\right)^{2p+1} + o\left(\rho\right)\rho^{2p+2}.\end{aligned}$$

Lorsque ρ tend vers 0, cette égalité est d'application : on constate alors que les coefficients de la puissance de la variable ρ restent invariants (pour un même cercle de rayon R). En d'autres termes, l'angle corniculaire γ considéré est parfaitement déterminé par la suite des coefficients c_j des puissances de ρ, à savoir pour tout entier positif n,

$$c_{2n-1} = \frac{(2n-1)!}{2^{4n-3}\big((n-1)!\big)^2(2n-1)^2R^{2n-1}} \text{ et } c_{2n} = 0.$$

On peut dès lors associer à cet angle corniculaire γ un nombre superréel d'ordre 1, à savoir

$$\mu_\gamma = \left(\frac{1}{2R}, 0, \frac{3!}{(2\cdot 3)^2}\frac{1}{(2R)^3}, 0, \frac{5!}{(4\cdot 5\cdot 2)^2}\frac{1}{(2R)^5}, 0, \dots\right) :$$

ce nombre superréel est défini comme étant une *mesure* de l'angle corniculaire considéré. A la suite de Tall ([7]), on peut encore écrire ce nombre superréel μ_γ sous la forme d'une série formelle, à savoir, avec les nombres réels c_j introduits plus haut

$$\mu_\gamma = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j\varepsilon^j,$$

où ε désigne un symbole "non spécifié" ([7], p. 27).

Plus généralement, pour un angle mixtiligne α dont la fonction d'estimation F_α admet comme développement de Mac Laurin

$$F_\alpha\left(\rho\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j\rho^j,$$

on définit la mesure μ_α comme étant le nombre superréel écrit de façon formelle sous la forme suivante :

$$\mu_\alpha = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j\varepsilon^j.$$

Dans ce cas, la partie standard du nombre superréel fini ([7], p. 28) μ_α représente la mesure classique de l'angle rectiligne de même sommet et formé par l'axe des abscisses et par la tangente menée à la courbe considérée depuis le sommet de l'angle.

En comparant la présentation formelle d'un angle mixtiligne avec le développement de Mac Laurin de sa fonction d'estimation, le superréel ε peut être assimilé à une variable ρ tendant vers zéro, ce qui correspond, lorsque le côté curviligne est tangent au côté rectiligne, à la conception d'un infiniment petit donnée par Cauchy ([1], p. 3).

Remarque Une interprétation géométrique de ε se réfère à la mesure de l'angle mixtiligne formé, dans le plan, par l'axe horizontal des abscisses et la spirale d'Archimède, puisque cette dernière est d'équation polaire :

$$\theta = \rho.$$

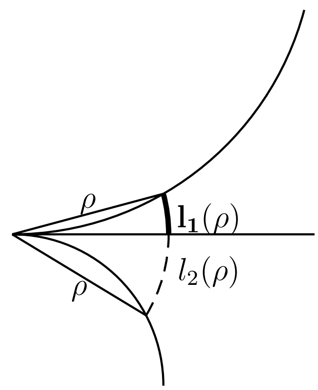
La structure algébrique définie sur l'ensemble des superréels $\mathcal{R}$ peut être appliquée aux mesures ainsi introduites pour les angles corniculaires. Nous allons montrer que l'ordre $<_{\mathcal{R}}$ et l'addition $+_{\mathcal{R}}$ sont conformes à l'intuition géométrique, la multiplication $\times_{\mathcal{R}}$ ne semblant pas avoir d'interprétation évidente dans ce contexte.

Ainsi, un angle corniculaire γ_1 défini par un cercle de rayon R_1 avait été déclaré ci-dessus "plus grand" qu'un angle corniculaire γ_2 correspondant à un rayon R_2, ce que nous avions noté $\gamma_2 <_T \gamma_1$, si et seulement si $R_1 < R_2$; cette condition équivaut bien à l'inégalité correspondante sur leurs mesures superréelles ; en effet,

$$\gamma_2 <_T \gamma_1 \Leftrightarrow \mu_{\gamma_2} < \mu_{\gamma_1}.$$

Par ailleurs, pour additionner deux angles corniculaires γ_1 et γ_2, il suffit, intuitivement, d'en placer un au-dessus de l'axes des abscisses et l'autre en-dessous, puis de définir l'angle formé par ces deux portions de cercles ; ce n'est plus un angle corniculaire ([8]), mais bien un angle curviligne dont les deux côtés sont des portions de cercle et pour lequel on dispose de cette égalité (avec des notations évidentes reprises sur la figure ci-dessous) :

$$\frac{l(\rho)}{\rho} = \frac{l_1(\rho)}{\rho} + \frac{l_2(\rho)}{\rho}.$$



Algébriquement, la mesure de la somme des deux angles s'obtient simplement en additionnant terme à terme au sens de Tall les deux séries définissant γ_1 et γ_2.

5 Estimation du rapport des mesures de deux angles corniculaires

Soit un angle corniculaire γ engendré par un cercle de rayon R. Sa mesure μ_γ vaut le nombre nombre superréel infiniment petit écrit de façon formelle

$$\mu_\gamma = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j \varepsilon^j.$$

Or, le superréel ε peut être adopté comme mesure de l'angle mixtiligne σ défini par l'axe horizontal et la spirale d'Archimède. En notant μ_σ la mesure de σ, on peut estimer le rapport de μ_γ et de μ_σ : il s'agit du quotient de deux superréels infiniment petits, mais ce quotient est un superréel appréciable, égal à

$$\frac{\mu_\gamma}{\mu_\sigma} = \frac{\sum_{j=1}^{+\infty} c_j \varepsilon^j}{\varepsilon} = \frac{1}{2R} + \sum_{j=1}^{+\infty} c_j \varepsilon^{j-1} \ ;$$

la partie standard de ce rapport vaut donc le nombre réel

$$\mathrm{st}\ \left(\frac{\mu_\gamma}{\mu_\sigma}\right) = \frac{1}{2R}.$$

Dans le même ordre d'idées, on peut comparer entre elles les mesures de deux angles corniculaires quelconques, ce qui rend obsolète la remarque faite par Proclus dans son

Commentaire des *Eléments* d'Euclide selon laquelle les angles corniculaires ne peuvent pas être des *grandeurs qui ont un rapport l'une par rapport à l'autre* ([2], p. 426).

En effet, considérons deux angles corniculaires, notés respectivement γ_1 et γ_2, ayant un même sommet P, un même côté rectiligne H, les autres côtés respectifs étant des cercles, tangents à H au point P et de rayons respectifs R_1 et R_2. Avec des notations conformes avec ce qui précède, les mesures de ces deux angles sont données par

$$\mu_{\gamma_1} = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j \varepsilon^j \text{ et } \mu_{\gamma_2} = \sum_{j=1}^{+\infty} c'_j \varepsilon^j.$$

On en déduit donc

$$\frac{\mu_{\gamma_1}}{\mu_{\gamma_2}} = \frac{\frac{\mu_{\gamma_1}}{\varepsilon}}{\frac{\mu_{\gamma_2}}{\varepsilon}} = \frac{\frac{1}{2R_1} + \dots}{\frac{1}{2R_2} + \dots},$$

où les signes ... remplacent chaque fois un superréel infiniment petit. En conséquence, le quotient étudié est appréciable et sa partie standard égale à

$$\mathrm{st}\left(\frac{\mu_{\gamma_1}}{\mu_{\gamma_2}}\right) = \frac{R_2}{R_1}.$$

Remerciements Nous remercions vivement M. N. Rouche (CREM, Belgique) qui, au cours de discussions fructueuses sur l'enseignement de l'analyse non standard, nous a mis sur la piste des angles corniculaires introduits par Euclide.

Références

[1] Artigue M., Gautheron V. , Isambert E., *Analyse non standard et enseignement*, Cahier de didactique des mathématiques, n° 15, I.R.E.M. - Université de Paris VII, 1985.

[2] Euclide d'Alexandrie, *Les Eléments - Volume 1*, Traduits du texte de Heiberg, *Introduction générale* par M. Caveing - *Livres I à IV* traduction et commentaires par B. Vitrac, Presses Universitaires de France, 1990.

[3] Henry V., Les infiniment petits, *Tangente*, Les Editions Pole, Paris, n° 100, 2004, pp. 22 - 23.

[4] Henry V., *Questions de didactique soulevées par un enseignement de l'analyse non standard à de futurs économistes*, thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Université P. Sabatier, Toulouse, 2004.

[5] Ooms J., Et pourquoi pas l'infiniment petit ... , *Mathématique et Pédagogie*, n° 144, 2003, pp. 15 - 20.

[6] Radelet - De Grave P., La mesure de la courbure et la pratique du calcul différentiel du second ordre, Actes du Colloque de Peyresq sur *La pensée numérique*, C. Alvarez - J. Dhombres - J.C. Pont éd., 1999, pp. 159 - 178.

[7] Tall D., Looking at graphs through infinitesimal microscopes, windows ans telescopes, *The Mathematical Gazette*, vol. 64, 1980, pp. 24 - 49.

[8] van Asch A.G. - van der Blij F, Measurements of curvilineal angles, *Bull. Belg. Math. Soc.*, 2 (1995), pp. 573 - 588.

[9] Wallis J., *Operum mathematicorum pars altera, qua continentur : de Angulo contactus et semicirculi disquisitio geometrica*, Oxinii, 1654.

Université de Liège
HEC-Ecole de Gestion
Boulevard du Rectorat, 7
4000 Liège (Sart-Tilman)
Belgique